

Vorlesung 2b

Diskrete Zufallsvariable und ihre Verteilungen

Teil 3:

Zufällige Besetzungen:

Vom Würfeln zur Multinomialverteilung

bisher: $g=2$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_g = 1$$

$p + q = 1$

1. Das (p_1, \dots, p_g) -Würfeln als Verallgemeinerung des p -Münzwurfs

Oder: Was 2 recht ist, soll g billig sein!

(vgl. Buch S. 28)

Definition (“ n -faches (p_1, \dots, p_g) -Würfeln”):

Seien $g \in \mathbb{N}$ und $p_1, \dots, p_g \geq 0$ mit $p_1 + \dots + p_g = 1$.

Wir definieren **Verteilungsgewichte** auf

$$S := \{a = (a_1, \dots, a_n) : a_i \in \{1, \dots, g\}\}$$

durch

$$\rho(a_1, \dots, a_n) := p_{a_1} \cdot p_{a_2} \cdots p_{a_n}.$$

Definition (“ n -faches (p_1, \dots, p_g) -Würfeln”):

Seien $g \in \mathbb{N}$ und $p_1, \dots, p_g \geq 0$ mit $p_1 + \dots + p_g = 1$.

Wir definieren **Verteilungsgewichte** auf

$$S := \{a = (a_1, \dots, a_n) : a_i \in \{1, \dots, g\}\}$$

durch

$$\rho(a_1, \dots, a_n) := p_{a_1} \cdot p_{a_2} \cdots p_{a_n}.$$

Eine Zufallsvariable X mit diesem Zielbereich S und diesen Verteilungsgewichten ρ nennen wir

n -faches (p_1, \dots, p_g) -Würfeln.

Für jedes $a \in S$ mit

b_1 Komponenten gleich 1,

b_2 Komponenten gleich 2,

...

b_g Komponenten gleich g

ist dann

$$\mathbf{P}(X = a) = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_g^{b_g}$$

2. Vom (p_1, \dots, p_g) -Würfeln
zur Multinomialverteilung



$X = (X_1, \dots, X_n)$ sei ein n -faches (p_1, \dots, p_g) -Würfeln

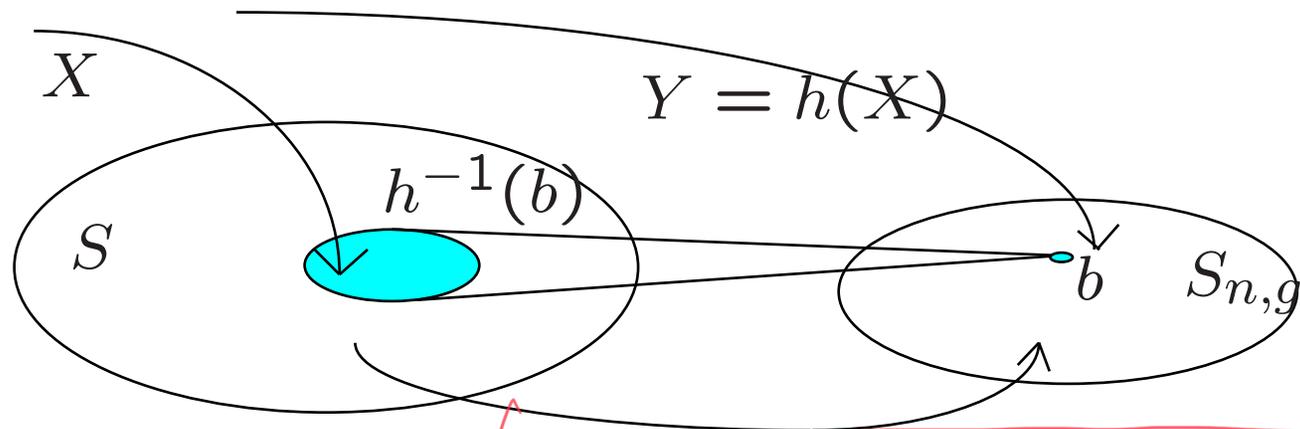
$$Y_j := \#\{i : X_i = j\}$$

(die Anzahl der Würfe mit Ergebnis j).

$Y := (Y_1, \dots, Y_g)$ hat dann den Zielbereich

$$S_{n,g} = \{(b_1, \dots, b_g) : b_j \in \mathbb{N}_0, b_1 + \dots + b_g = n\}.$$

Verteilung von $Y = ?$



$$h(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_g) =: b$$

mit $b_j := \#\{i : a_i = j\}$, $j = 1, \dots, g$

Jedes $a \in S$ mit $h(a) = (b_1, \dots, b_g)$

hat Gewicht $p_1^{b_1} \dots p_g^{b_g}$

Wieviele solche a gibt es?

Dazu überlegen wir:

Bsp: $g = 6$ $n = 100$
 $b_1 = 10, b_2 = 15, b_3 = 20, b_4 = 15, b_5 = 18, b_6 = 22$
 Auf wieviele Arten kann man

n Objekte so auf g Fächer verteilen,
 dass das j -te Fach jeweils genau b_j Objekte enthält?

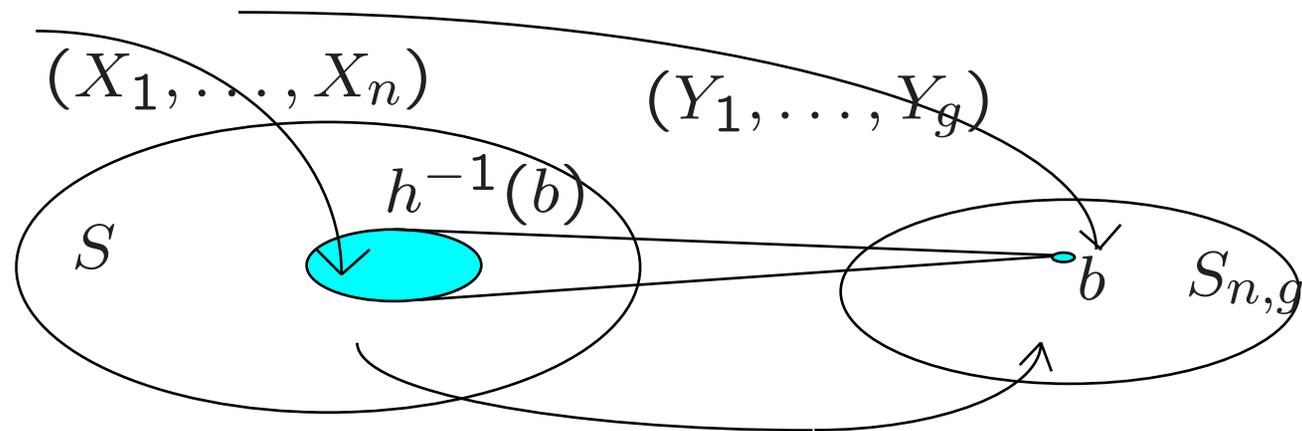
Dabei ist $b_1 + \dots + b_g = n$.

Die Antwort ist:

$$\binom{n}{b_1} \cdot \binom{n - b_1}{b_2} \cdots \binom{n - b_1 - \dots - b_{g-1}}{b_g}$$

$$= \frac{n!}{b_1! b_2! \cdots b_g!} =: \binom{n}{b_1, \dots, b_g}$$

Multinomialkoeffizient, lies: n über b_1, \dots, b_g



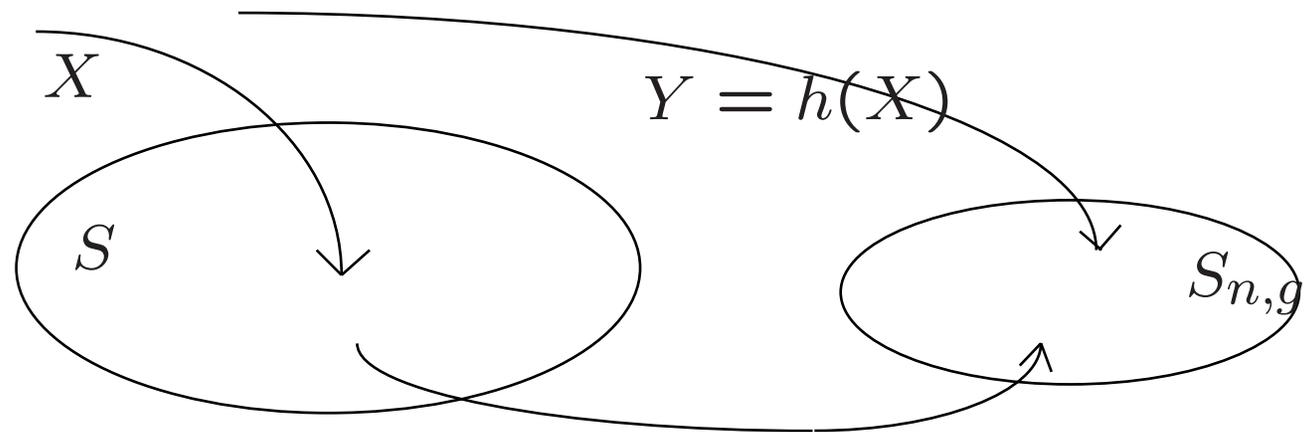
$$h(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_g)$$

Jedes $a \in S$ mit $h(a) = (b_1, \dots, b_g)$

hat Gewicht $p_1^{b_1} \dots p_g^{b_g}$

Es gibt $\binom{n}{b_1, \dots, b_g}$ solche a .

$$\mathbf{P}(Y_1 = b_1, \dots, Y_g = b_g) = \binom{n}{b_1, \dots, b_g} p_1^{b_1} \dots p_g^{b_g}$$



$$h(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_g) =: k$$

mit $b_j := \#\{i : a_i = j\}$, $j = 1, \dots, g$

$$\mathbf{P}(Y_1 = b_1, \dots, Y_g = b_g) = \binom{n}{b_1, \dots, b_g} p_1^{b_1} \dots p_g^{b_g}$$

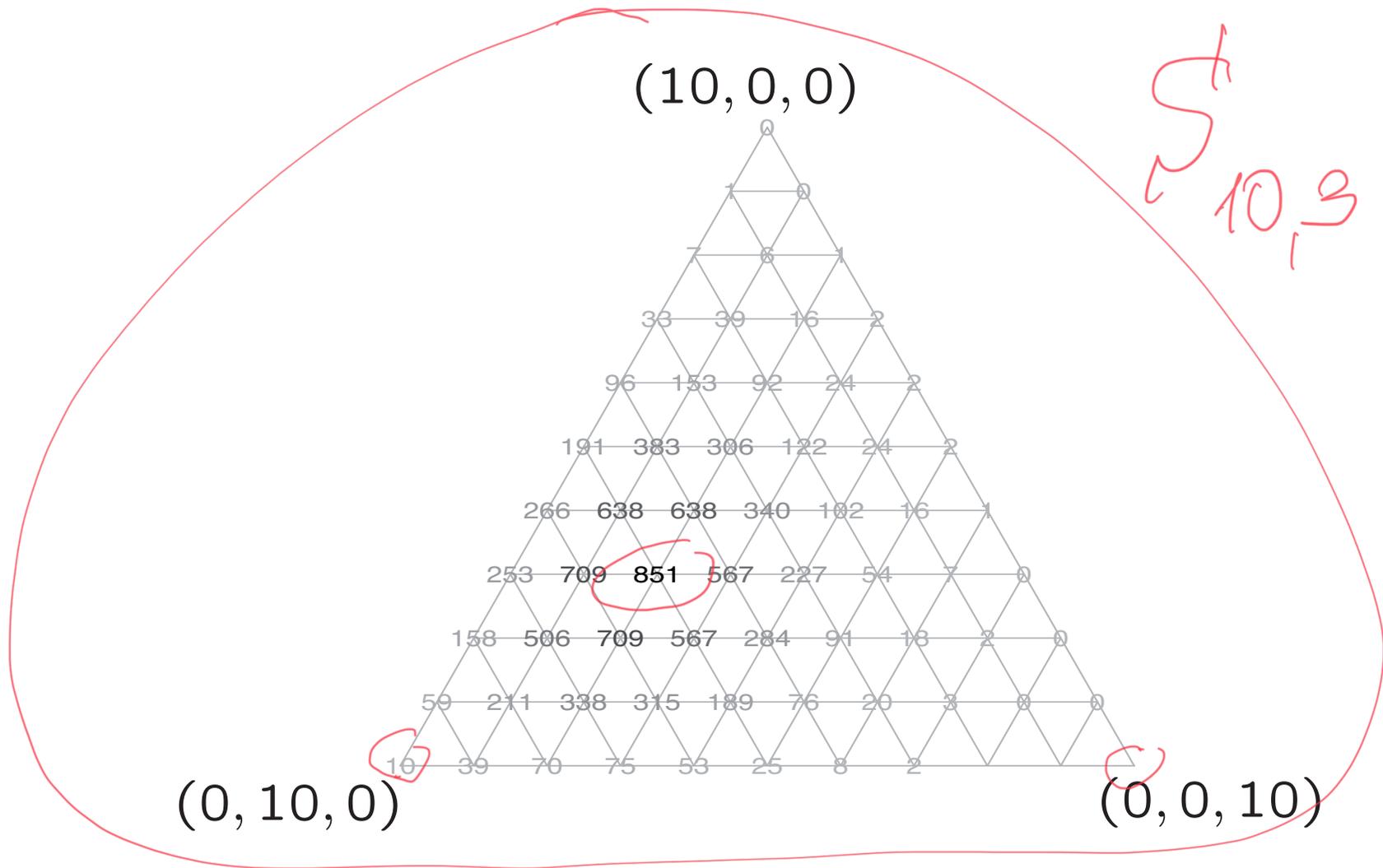
Definition:

Eine Zufallsvariable X mit Zielbereich $S_{n,g}$
heißt *multinomialverteilt* mit Parametern $n; p_1, \dots, p_g$,

wenn

$$\mathbf{P}(X = (b_1, \dots, b_g)) = \binom{n}{b_1, \dots, b_g} p_1^{b_1} \dots p_g^{b_g},$$

$$(b_1, \dots, b_g) \in S_{n,g}.$$



Gewichte der Multinomialverteilung, notiert in Vielfachen von $\frac{1}{10000}$,
 für $n = 10$, $g = 3$, $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.5$, $p_3 = 0.2$

Resumé

$$g \in \mathbb{N}$$

Würfeln

Besetzung der Ausgänge

Multinomialverteilung

$$g = 2$$

Münzwurf

Anzahl der Erfolge

Binomialverteilung